Correction du contrôle n°1

Solution de l'exercice 1. (questions de cours)

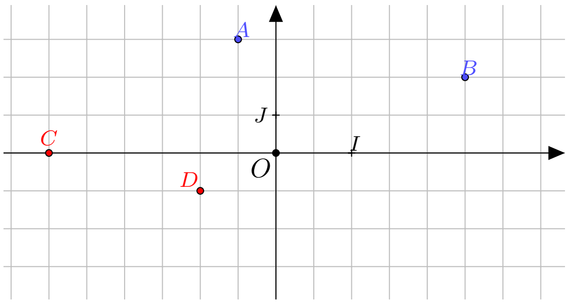
1. Un repère $(O; I, J)$ est dit orthonormé lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O, c'est-à-dire lorsque $OI = OJ$ et $(OI) \perp (OJ)$.
2. La distance AB est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

3. Le point d'intersection des trois médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.
4. Puisque les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, on en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme. De plus ce parallélogramme a ses diagonales de même longueur. $ABCD$ est donc plus précisément un rectangle.
5. Puisque (d) est tangente en M au cercle $\mathscr{C}$ de centre O, on sait que (d) et (OM) sont perpendiculaires.

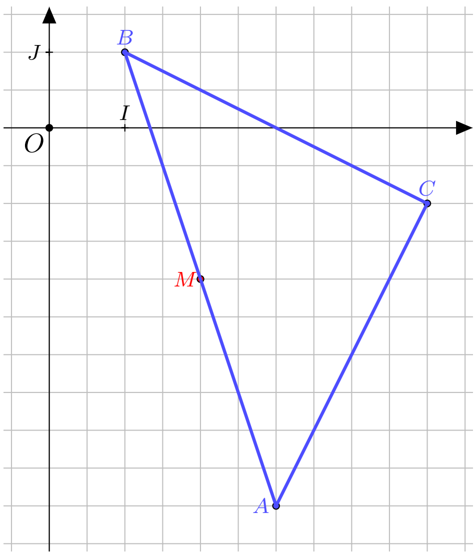
Solution de l'exercice 2.

Les coordonnées de A et B sont : $A(-0,5; 3)$ et $B(2,5; 2)$.



Solution de l'exercice 3.

1.



2. On calcule d'une part la distance AC :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(5-3)^2 + (-1-(-5))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-1+5)^2} \\ &= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

   D'autre part, on calcule également la longueur BC :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

   On observe bien que $AC = BC = 2\sqrt{5}$.

3. Pour AB, on écrit que

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (1+5)^2} \\ &= \sqrt{4+36} = \sqrt{40}. \end{aligned}$$

   Donc $AB^2 = 40$.

4. D'après la question 2, $AC = BC$, donc le triangle ABC est isocèle en C. De plus, en utilisant les calculs de BC et AC de la question 2, on a

$$BC^2 + AC^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20 + 20 = 40.$$

   Or d'après la question 3, $AB^2 = 40$. Donc

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est également rectangle en C.

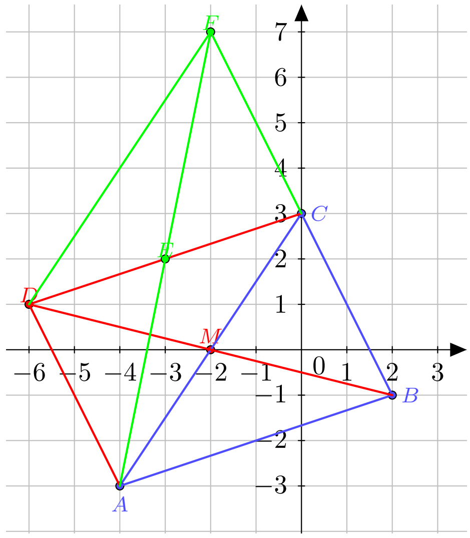
5. Puisque M est le milieu de $[AB]$, on a

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ &= \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \\ &= \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2. \end{aligned}$$

   D'où les coordonnées de M sont $M(2; -2)$.

Solution de l'exercice 4.

1.



2. Puisque $M(x_M; y_M)$ est le milieu de $[AC]$, on a

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+0}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0.$$

Les coordonnées de M sont donc $M(-2; 0)$.

3. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il faut et il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu. Cela signifie que M doit être également le milieu de $[BD]$. Donc

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_B + y_D}{2}.$$

En remplaçant les valeurs qui nous sont connues, on trouve que :

$$-2 = \frac{2 + x_D}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 = \frac{-1 + y_D}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} -2 \times 2 &= 2 + x_D \\ \Leftrightarrow -4 &= 2 + x_D \\ \Leftrightarrow x_D &= -4 - 2 = -6 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} 0 &= -1 + y_D \\ \Leftrightarrow 1 &= y_D \\ \Leftrightarrow y_D &= 1. \end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont donc $D(-6; 1)$.

4. Puisque E est le milieu de $[DC]$, on a

$$x_E = \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{-6+0}{2} = -3. \qquad y_E = \frac{y_D + y_C}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Les coordonnées de E sont donc $E(-3; 2)$.

5. $F(x_F; y_F)$ est le symétrique de A par rapport au point E si et seulement si le point E est le milieu de $[AF]$. Donc

$$x_E = \frac{x_A + x_F}{2} \qquad \text{et} \qquad y_E = \frac{y_A + y_F}{2}.$$

En remplaçant les valeurs qui nous sont connues, on trouve que :

$$\begin{aligned} -3 &= \frac{-4 + x_F}{2} \\ \Leftrightarrow -6 &= -4 + x_F \\ \Leftrightarrow x_F &= -6 + 4 = -2. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{-3 + x_F}{2} \\ \Leftrightarrow 4 &= -3 + x_F \\ \Leftrightarrow x_F &= 4 + 3 = 7. \end{aligned}$$

Les coordonnées de F sont donc $F(-2; 7)$.

6. Par construction on sait que E est le milieu de $[DC]$ ainsi que de $[AF]$. Donc le quadrilatère $ACFD$ a ses diagonales $[DC]$ et $[AF]$ qui se coupent en leur milieu E. Donc le quadrilatère $ACFD$ est un parallélogramme.